

Logique et programmation logique

Sommaire

1. Rappels	1
1.a. Interprétation des formules	1
1.b. Substitution	2
2. Système formel	2
2.a. Système de Hilbert	3

1. Rappels

Formule

Définition 1

Elle est définie inductivement de la manière suivante :

- Des éléments de base qui sont des variables propositionnelles : $\{a, b, \dots, A, B\}$
- Des règles

1.a. Interprétation des formules

Interprétation

Définition 2

Une interprétation I est une valeur booléenne sur les variables propositionnelles $I(F)$:

- Si F est une variable, alors sa valeur est donnée, sinon si :
 - $F = \neg A$, alors $I(F) = 1 - I(A)$
 - $F = A \rightarrow B$, alors $I(F) = 1$ ssi $I(A) = 0$ ou $I(B) = 1$
 - $F = A \wedge B$, alors $I(F) = \min(I(A), I(B))$
 - $F = A \vee B$, alors $I(F) = \max(I(A), I(B))$
- F est **satisfiable** si $\exists I, I(F) = 1$
- F est **valide** / une **tautologie** si $\forall I, I(F) = 1$
- F est **contradictoire** si $\forall I, I(F) = 0$

Conséquence et équivalence logique

Définition 3

- Conséquence logique : $A \models B$ ssi $\forall I, I(A) = 1$, alors $I(B) = 1$
- Équivalence logique : $A \equiv B$ ssi $A \models B$ et $B \models A$

Théorème 4

$A \equiv B$ ssi $A \leftrightarrow B$ est valide

Forme Normale Conjonctive

Définition 5

Une formule est sous *FNC* si elle s'écrit comme conjonction de clauses, chaque clause étant une disjonction de littéraux, et un littéral étant une variable ou sa négation.

Exemple 6

$(\neg a \vee b \wedge \neg c) \wedge (a \vee \neg b)$ est sous *FNC*

Théorème 7

Pour toute formule F , il existe F' sous FNC telle que $F \equiv F'$.

1.b. Substitution

Définition 8

$F[x \leftarrow G]$ la formule F dans laquelle la var x est substituée par G est définie par :

- Si $F = p$ alors :
 - Si $p = x$, $F[x \leftarrow G] = G$
 - Si $p \neq x$, $F[x \leftarrow G] = F$
- Si $F = A \rightarrow B$ alors $F[x \leftarrow G] = A[x \leftarrow G] \rightarrow B[x \leftarrow G]$
- [...]

Théorème 9

Si F est valide, alors $F[x \leftarrow G]$ l'est aussi.

2. Système formel

Définition 10

- Un **système formel** est un ensemble d'axiomes $\mathcal{A}$ et de règles inductives $\mathcal{R}$
- Un **théorème** est une formule construite à partir des axiomes en appliquant les règles de $\mathcal{R}$
- La preuve d'un théorème est un arbre qui a comme feuilles les axiomes et comme nœuds les règles

Consider the following tree:

$\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\varphi}$ i Π constitutes a derivation of φ .

Exemple 11

$\mathcal{A} : \{(0,0)\}$ et $\mathcal{R} : \frac{(x,y)}{(x+1,y+1)}$

Complétude et correction

Définition 12

Un système, muni d'une interprétation :

- Est **complet** si chaque formule valide est un théorème
- Est **correct** si chaque théorème est une formule valide

Théorème et preuve

Définition 13

- On note $\vdash F$ le fait que F est un théorème
- On note $\{P_1, \dots, P_n\} \vdash F$ le fait d'avoir une preuve dans laquelle $P_1, \dots, P_n$ peuvent être des feuilles

Observation

Définition 14

$\vdash F \leftrightarrow \models F$ signifie que le système est correct et complet.

2.a. Système de Hilbert

$\mathcal{A} : K = A \rightarrow (B \rightarrow A)$ et $S = (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$\mathcal{R} : \frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \text{MP (Modus Ponens)}$

Méta théorème

Théorème 15

Le système de Hilbert est correct.

Méta preuve

Preuve 16

Par induction structurelle :

Axiomes :